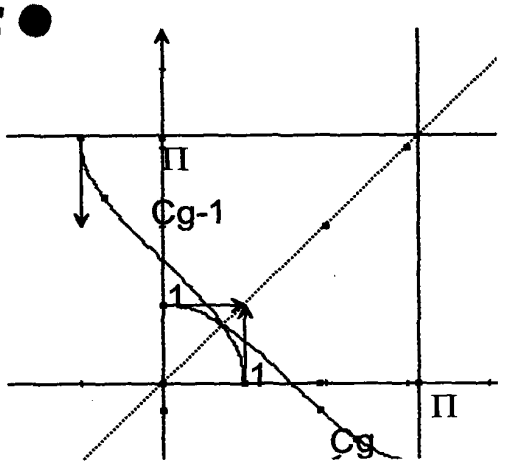

● $x \in [-1, 1]$

a) $\cos[g^{-1}(x)] = g(g^{-1}(x)) = x$

$\sin[g^{-1}(x)] = \sqrt{1-\cos^2(g^{-1}(x))} = \sqrt{1-x^2}$

b) On sait que : $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ d'où

$$\cos(\pi - g^{-1}(x)) = -\cos(g^{-1}(x))$$

$$\cos(\pi - g^{-1}(x)) = -x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$g^{-1}[\cos(\pi - g^{-1}(x))] = g^{-1}(-x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{g^{-1}og}_{Id}(\pi - g^{-1}(x)) = g^{-1}(-x)$$

Finalement : $\boxed{\pi - g^{-1}(x) = g^{-1}(-x).}$

Exercice n° 12

$f(x) = 2x - \sin x$, $x \in IR$

● f est dérivable sur IR et $f'(x) = 2 - \cos x > 0$ car $\cos x \leq 1$ donc f strictement croissante sur IR

* f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR sur $f(IR)$

Or on sait que $\forall x \in IR : -1 \leq \sin x \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 + 2x \leq 2x - \sin x \leq 1 + 2x$

Utilisant le théorème de comparaison :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x + 1 = -\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

D'où $f(IR) = \left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[= IR$

● a) f est une bijection de IR sur IR, $4 \in IR$ donc l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans IR

b) $f(2,2) = 3,59 < 4$ et $f(2,4) = 4,12 > 4$

Donc $\boxed{2,2 \leq \alpha \leq 2,4.}$

● $g(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x$

a) $g(\alpha) = 2 + \frac{1}{2}\sin\alpha$ (*)

On sait que $f(\alpha) = 4$ donc $2\alpha - \sin\alpha = 4$ et par la suite

$\sin\alpha = 2\alpha - 4$

Remplacent cette expression de $\sin\alpha$ dans l'égalité (*)

On aura : $g(\alpha) = 2 + \frac{1}{2}(2\alpha - 4) = 2 + \alpha - 2 = \alpha$

D'où $\boxed{g(\alpha) = \alpha.}$

b) $g'(x) = \frac{1}{2}\cos x$

Or : $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\cos x \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}\cos x\right| \leq \frac{1}{2}$

Donc $\forall x \in IR$, $\boxed{|g'(x)| \leq \frac{1}{2}}$

c) g est dérivable sur IR , $x \in IR$, $\alpha \in IR$ et $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a :

$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\Leftrightarrow |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice n° 13

● f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$f'(x) = (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})' = 0 + \frac{-(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x) < 0$: f étant continue et strictement

Qaray.tn - Kora Blech - Qaray.tn